VIII. *Propositiones aliquot de Projectilium motu Parabolico, Scriptæ An.* 1710. *Per* B. Taylor, *LL. D. R. S. S.*

PROPOSITIO I.

Vi gravitatis, ejusq; directione datis, motus corporis projecti, in medio non resistente, fit in Parabolâ.

DEMONSTRATIO.

PRojiciatur corpus de loco *A* (Fig. 1.) in directione lineæ *AB*, sitque ejus trajectoria curva *ACD*. Ad trajectoriæ punctum quodlibet *C*, duc rectam *CB* in directione vis Gravitatis, rectæ *AB* occurrentem in *B*; atq; resolvetur motus projectilis per *AC* in partes *AB*, *BC*, quarum *AB* oritur a motu projectionis uniformi, atq; *BC* a vi gravitatis accelerante. Est ergo recta descripta *AB* tempori proportionalis ab initio motûs in *A*, atq; est *BC* in duplicatâ ratione ejusdem temporis, sicut olim demonstravit Galilæus; adeoque in duplicatâ ratione rectæ *AB*. Cum ergo sit *BC* in duplicatâ ratione rectæ *AB*, constat curvam *ACD* esse Parabolam. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. II.

Velocitas corporis projecti in quolibet puncto trajectoriæ, ea est, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem æqualem quartæ parti parametri Parabolæ ad punctum illud.

DEMONSTRATIO.

Sit Trajectoria *A C D* (Fig. 2.) Ad punctum quodlibet *A* ducantur tangens *A B*, & diameter *A E*. In tangente *A B* fiat *A B* æqualis dimidio parametri ad verticem *A*, & diametro *A E* parallela ducatur *B C*, trajectoriæ occurrens in *C*, & ad punctum *C* duci intelligatur tangens *C G*, tangenti *A B* occurrens in *F*, atq; diametro *A E* in *G*. Tum ex naturâ parabolæ erunt *A G*, *C B* æquales, adeoq; & *A F*, *F B*; & quoniam est *A B* æqualis dimidio parametri ad punctum *A*, erit *B C* quarta pars ejusdem parametri, & proinde æqualis ipsi *B F*. Ipsi *B C* proximam & parallelam duc *b c*, parabolæ occurrentem in *c*, & duc lineæ *B b* parallelam *C β*, ipsi *b c* occurrentem in *β*. Tum quoniam spatium *C c*, adeoque & spatium *β c*, finguntur perexigua, velocitates quibus describuntur erunt æquabiles quamproximè; adeoq; spatia *B b*, seu *C β*, *C c*, cum eodem tempore describantur, erunt ut velocitates quibus describuntur, & vicissim velocitates erunt ut spatia. Coincidant puncta *C*, *c*, atq; erunt hæ rationes accuratæ. Sed in isto casu propter similia triangula *C β c*, *F B C*, fit *C β* ad *β c*, sicut *F B* ad *B C*; ideoq; velocitates quibus describuntur *B b*, *β c* sunt ut *F B*, *B C*, hoc est, sunt æquales. Velocitas autem, quâ describitur *β c*,

ea

ea eſt, qua movetur projectile in puncto *A*, & velocitas altera qua deſcribitur *β c*, ea eſt quam corpus acquirit cadendo per altitudinem *B C* quartæ partis parametri ad punctum *A*. Eſt ergo velocitas projectilis in quolibet puncto *A* æqualis velocitati, quam corpus acquirere poteſt cadendo per altitudinem quartæ partis parametri ad punctum illud. *Q. E. D.*

PROP. III.

Datis velocitate & directione projectionis, invenire Trajectoriam corporis projecti.

1. Projiciatur corpus de loco *A* (Fig. 3.) in directione rectæ *A B*. Duc *A C* in directione vis gravitatis, (hoc eſt Horizonti perpendicularem,) ejus longitudinis, ut ſit *C* punctum, unde corpus cadendo acquirere poteſt velocitatem in *A*, quâ ſit projectio. Duc *A F* æqualem *A C*, angulum *F A B* conſtituentem cum lineâ directionis *AB*, æqualem angulo *C A B*. Duc *C D* perpendicularem ad *A C* (hoc eſt horizonti parallelam,) eiq; occurrentem *FD*, ipſi *A C* parallelam. Biſeca *F D* in *E*; atq; erit *E F* axis, atq; *E* vertex principalis Parabolæ, per quam movetur projectile. Unde deſcribetur Trajectoria per notas proprietates Parabolæ. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *A C* quarta pars parametri ad verticem *A*. Unde conſtant cætera ex conicis.

2. Ad punctum Trajectoriæ quodvis *G*, duc *GH* ipſi *A C* parallelam, & ipſi *C D* occurrentem in *H*; atque iter *H G* altitudo, per quam corpus cadendo acquirere

 poteſt

poteſt velocitatem, quâ movetur projectile in puncto *G*. *Q. E. F.*

Hoc item conſtat ex Prop 2. & ex conicis.

Scholium. Si ad puncta *A*, & *C* (Fig. 2.) ducantur tangentes *A B*, *C G* occurrentes rectis horizonti perpendicularibus *C B*, *A G*, in *B* & *G*; velocitates in *A* & *C* erunt inter ſe ut tangentium partes interceptæ, *A B*, *C G*.

PROP. IV.

Unico facto experimento invenire velocitatem projectionis.

Projiciatur corpus de loco *A* (Fig. 2.) in directione qualibet *A B*, atq; obſervetur punctum percuſſum *C*. In directione vis gravitatis ducatur *C B*, ipſi *A B* occurrens in *B*, atque ipſis *C B*, *A B*, fiat tertia proportionalis *L*. Erit quarta pars longitudinis *L* altitudo, per quam corpus cadendo acquirere poteſt velocitatem projectilis in *A*. *Q. E. I.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *L* parameter Trajectoriæ ad punctum *A*; unde conſtat ſolutio per propoſitionem ſecundam.

Scholium. Commodiſſimè inſtituitur experimentum, erectâ ad horizontem perpendiculari *A G*, & directionem ſumendo *A B*, quæ biſecet angulum *C A G*, rectâ etiam *A C* exiſtente horizonti parallelâ. Nam in iſto caſu altitudo quæſita æqualis eſt dimidio diſtantiæ *A C*.

PROP.

PROP. V.

Datis directione & velocitate projectionis; invenire occursum Trajectoriæ cum rectâ transeunte per punctum unde fit projectio.

Projiciatur corpus de loco *A* (Fig. 4.) in directione rectæ *A B*. In directione gravitati contrariâ, fiat *A C* æqualis altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem, quâ fit projectio, atq; ducatur *C E* ipsi *A C* perpendicularis. Fiat *F A* æqualis ipsi *C A*, atq; angulum constituens *F A B* æqualem angulo *C A B*. Sit *A K* recta, cujus occursus cum Trajectoriâ quæritur. Duc *F I* ipsi *A K* perpendicularem, atq; ipsi *C E* occurrentem in *D*. In *C E* sume *E D* æqualem *C D*, atq; ducatur ipsi *C E* perpendicularis *E K*, ipsi *A K* occurrens in *K*. Erit *K* punctum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

In *F I* productâ fiat *f I* æqualis *F I*, atq; ducantur *f A*, *f E*, *F E*, *F K*. Quoniam est angulus *F I A* rectus, atq; *f I* æqualis *F I*, est etiam *f A* æqualis *F A*. Sed per constructionem est *F A* æqualis *C A*, atque angulus *D C A* rectus. Sunt ergo puncta *C*, *F*, *f* ad circulum centro *A* descriptum, quem tangit recta *D C* in *C*. Sunt ergo *F D*, *C D*, *f D*, continuè proportionales. Sed est *E D* æqualis *C D* (per constructionem) Sunt ergo *F D*, *E D*, *f D* continuè proportionales; adeoque ob angulum communem ad *D*, triangula *F E D*, *E f D* sunt similia, atque angulus *D E F* æqualis angulo *E f F*.

Puncta itaq; tria F, E, f sunt ad circulum, quem tangit recta ED in E. Sed quoniam est fI æqualis FI, atq; angulus FIK rectus, centrum istius circuli est in rectâ IK; item quoniam est angulus DEK rectus, centrum illud est etiam in rectâ EK. Est ergo K centrum istius circuli, adeoq; FK æqualis est ipsi EK. Jam (*per Prop.* 3.) sunt F focus Trajectoriæ, atq; CA quarta pars parametri ad punctum A. Unde cum sit CE ad AC & EK perpendicularis, atq; FK æqualis EK, erit punctum K ad Trajectoriam (per conica). *Q. E. D.*

PROP. VI.

Iisdem datis, invenire occursum Trajectoriæ cum rectâ, quâlibet positione datâ.

Projiciatur corpus de loco A (Fig. 5.) in directione AB, sitq; GH recta cujus occursus cum Trajectoriâ quæritur. Duc AC in directione gravitati contrariâ, atq; æqualem altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem, quâ sit projectio; & duc AF æqualem ipsi AC, ita ut sit angulus FAB æqualis angulo CAB; & ducatur CE perpendicularis ipsi CA. Ducatur FI ipsi GH occurrens ad angulos rectos in I, atq; ipsi CE in D; & in FI fiat fI æqualis FI. In CE fiat ED media proportionalis inter FD & fD; & ipsi CE ducatur perpendicularis EK, ipsi GH occurrens in K. Erit K punctum quæsitum. *Q. E. I.*

DEMONSTRATIO.

Conjungendo fE demonstratur ad modum propositionis præcedentis.

Scholium.

Scholium. Quoniam punctum *E* sumi potest ad utramlibet partem puncti *D*, duo sunt puncta *K*, *k*, ubi recta *G H* occurrit Trajectoriæ.

PROP. VII.

Datâ velocitate projectionis, invenire directionem, quæ faciat, ut Trajectoria transeat per punctum datum.

Projiciatur corpus de loco *A*, (Fig. 4.) & sit *K* punctum, per quod transire debet Trajectoria quæsita. Fiat *A C*, in directione gravitati contrariâ, æqualis altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem projectionis. Ducatur *C E* ipsi *A C* perpendicularis, & ad eam duc *K E* perpendicularem. Centris *A* & *K*, & radiis *C A*, *E K* describantur duo circuli sibi mutuo occurrentes in *F*. Duc *F A*, & biseca angulum *C A F* rectâ *A B*. Erit *A B* directio quæsita, in quâ fieri debet projectio, ut transeat Trajectoria per punctum *K*. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Est *C A* æqualis quartæ parti parametri ad punctum *A* (per *Prop.* 2.) Et per constructionem sunt *F A*, *C A* æquales, item *F K*, *E K*. Est ergo *F* focus Parabolæ per puncta *A*, *K*, descriptæ: Sed illam tangit recta *A B* in *A*, propter angulos *F A B*, *C A B* æquales. Corpore itaq; projecto de puncto *A*, in directione *A B*, eâ cum velocitate, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem *C A*, transibit Trajectoria per punctum *K*. *Q. E. D.*

NB. Cum

NB. Cum circulorum centris *A*, *K*, & radiis *C A*, *E K*, deſcriptorum duo ſint concurſus, *F*, *f*, biſectis angulis *F A C*, *f A C*, duo etiam erunt directiones, quæ faciant, ut Trajectoria tranſeat per punctum datum *K*.

PROP. VIII.

Datâ directione projectionis, invenire velocitatem, quæ faciat ut Trajectoria tranſeat per punctum datum.

Projiciatur corpus de loco *A* (Fig. 6.) in directione rectæ *A B*, & faciendum ſit ut tranſeat Trajectoria per punctum *K*. Duc *A K*, eamq; biſeca in *C*, & in directione gravitatis duc *C B*, ipſi *A B* occurrentem in *B*; & junge *B K*. Duc *A D*, *K E*, ipſi *C B* parallelas, & ducantur *A F*, *K F* ſibi mutuo occurrentes in *F*, ita ut ſint anguli *F A B*, *D A B* æquales, item *F K B*, *E K B*. Erit *F A* æqualis altitudini, per quam corpus cadendo acquirere poteſt velocitatem quæſitam, quâ projectio fieri debet in directione *A B*, ut tranſeat Trajectoria per *K*. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam *C B* eſt in directione gravitatis, eſt diameter Parabolæ; & quoniam *C A* æqualis eſt *C K*, eſt *C B* diameter ad ordinatam *A K*. Unde cum ſit *A B* tangens ad parabolam in *A*, erit etiam *K B* tangens ad punctum *K*. Hinc quoniam *A D* eſt in directione diametrorum, atq; angulus *F A B* æqualis angulo *D A B*, tranſit *A F* per focum parabolæ. Eodem argumento tranſit etiam *K F* per focum. Eſt ergo

ergo *F* focus parabolæ, adeoq; *F A* quarta pars parametri ad punctum *A*, quæ proinde æqualis est altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem ad hoc necessariam, ut projecto corpore de *A*, in directione *A B*, transeat Trajectoria per punctum *K*.

PROP. IX.

Invenire velocitatem minimam & directionem ei congruam, quâ fieri potest, ut transeat Trajectoria per punctum datum.

Projiciendum sit corpus de loco *A* (Fig. 7.) cum velocitate omnium minimâ & directione ei congruâ, quâ fieri potest ut perveniat in locum *K*, hoc est ut transeat Trajectoria per punctum *K*. Ductis *A C*, *K E* in directione gravitati contrariâ, & ductâ *A K*, biseca angulos *C A K*, *E K A*, rectis *A B*, *K B*, sibi mutuo occurrentibus in *B*. Duc *B C* ipsi *A C* occurrentem ad angulos rectos in *C*, atq; erit *C A* altitudo, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem quæsitam; eritq; *A B* directio quæsita. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur *B F* ipsi *A K* occurrens ad angulos rectos in *F*, atque occurrat *C B* ipsi *K E* in *E*. Propter angulos *C A B*, *B A F*, item angulos *E K B*, *B K F*, æquales atq; angulos rectos in *C*, *E*, & *F*, erunt æquales *C A*, *F A*, item *E K*, *F K*. Hinc constat puncta *A*, *K* esse ad parabolam, quam tangit recta *A B* in *A*, cujusq; parameter ad punctum *A* est quadruplum altitudinis *C A*, foco existente *F*. Corpore itaque

projecto

projecto de A in directione $A B$, eâ cum velocitate, quam corpus acquirere poteſt cadendo per altitudinem $C A$, Trajectoria erit dicta Parabola (per Prop. 8.) Dico autem illam eſſe velocitatem minimam, ſeu eſſe $C A$ partem quartam parametri omnium minimæ, quâ Parabola deſcribi poteſt, quæ tranſeat per puncta A, K.

Si fieri poteſt, in $C A$ capiatur altitudo $c A$ minor, quæ ſit quarta pars parametri ad punctum A. Duc ipſi $C A$ perpendicularem $c e$, ipſi $K E$ occurrentem in e, & centro A & radio $A c$ deſcribatur circulus ipſi $A K$ occurrens in f. Quoniam $c A$ dicitur quarta pars parametri ad punctum A, focus Parabolæ erit punctum aliquod p, in circumferentia circuli $c p f$, centro A & radio $A c$ deſcripti. Si ergo ſit punctum K ad parabolam illam, erit $p K$ æqualis $e K$. Eſt vero $F K$ æqualis $E K$. Unde cum ſit $e K$ minor ipſâ $E K$, erit etiam $p K$ minor ipſâ $F K$. Sed eſt $p K$ major ipſâ $f K$, atq; eſt $f K$ major ipſâ $F K$, (quoniam eſt $f A$ minor ipſâ $F A$ per hyp.) unde ſit $p K$ major ipſâ $F K$. Sed jam dicebatur $p K$ minor ipſâ $F K$; quæ repugnant. Nequit ergo Parabola deſcribi, quæ tranſeat per puncta A, K, minori parametro quam in ſolutione definitum eſt. *Q. E. D.*

PROP. X.

Datâ velocitate projectionis, invenire directionem, quæ faciat, ut corpus projiciatur ad diſtantiam omnium maximam in plano dato; atq; diſtantiam illam definire.

Sit planum datum $A K$ (Fig. 8.) atq; invenienda ſit diſtantia maxima $A K$, ad quam corpus projici poteſt in plano illo.

Duc

Duc AC in directione gravitati contrariâ, æqualem quartæ parti parametri ad punctum A. Tum bisecto angulo CAK rectâ AB, erit AB directio projectionis quæsita. Duc CB ipsi CA perpendicularem, rectæ AB occurrentem in B, atque in CB productâ fiat BE æqualis ipsi BC. Tum ductâ EK, ipsi CA parallelâ, quæ occurrat plano AK in K, erit AK distantia maxima quæsita.

DEMONSTRATIO.

Centro A & radio AC describe circulum, ipsi AK occurrentem in F, & ducantur BF, BK. Quoniam anguli CAB, BAF sunt æquales (per constructionem) atque AF æqualis CA, erit BF æqualis CB, æqualis BE (per constructionem) atq; anguli ad F recti. Unde etiam fit FK æqualis EK. Sunt ergo puncta A, K ad parabolam foco F descriptam, quam tangit AB in A (propter angulos CAB, FAB æquales) quartâ parte parametri ad punctum A existente CA. Corpore igitur projecto de loco A, in directione AB, eâ cum velocitate, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem CA, Trajectoria transibit per punctum K (per Prop. 2.) *Q. E. D.*

Dico autem, quod sit KA distantia omnium maxima, ad quam corpus projici potest de loco A eâdem cum velocitate.

Si fieri potest, eâdem parametro, ad A describatur parabola, quæ transeat per punctum distantius k; hoc est projiciatur corpus ad distantiam majorem kA. Duc Bk, atq; ipsi KE parallelam ke, ipsi CE occurrentem in e. Quoniam FB, EB, item FK, EK sunt æquales, sunt etiam anguli FBK, EBK æquales. Angulus ergo FBk major est angulo kBe; unde

fit $k F$ major ipfa $k e$. Sed quoniam eft $A C$ quarta pars parametri ad punctum A, focus parabolæ erit alicubi in circumferentiâ circuli centro A, & radio $C A$ defcripti. Sit focus ille p, & ducatur $p k$. Tum quoniam $p k$ major eft ipfâ $F k$, erit etiam $p k$ major ipfâ $k e$. Sed ut parabola tranfeat per punctum k, debet effe $p k$ æqualis $k e$. Nequit ergo parabola duci in circumftantiis propofitis, quæ tranfeat per punctum k diftantius puncto K; adeoq; nec corpus projici ad diftantiam majorem ipfâ $K A$. *Q. E. D.*

P R O P. XI.

Iifdem pofitis, invenire locum puncti K, *feu Curvam defcribere, quæ tangat omnes parabolas eodem vertice* A *& eâdem parametro defcriptas.*

Sit A (Fig. 9.) vertex datus, atq; in directione gravitati contrariâ ducatur $A C$ æqualis quartæ parti parametri datæ. Tum defcriptâ parabolâ, cujus vertex principalis fit C, atq; focus A; erit ea curva quæfita.

D E M O N S T R A T I O.

Duc quamlibet $A K$, atq; in eâ fume $F A$ æqualem $C A$, & ducatur $C B$ ad $C A$ perpendicularis, fitq; K punctum in propofitione præcedente inventum. In $A C$ productâ, factâ $C c$ æquali $C A$, ducatur $c e$ parallela ipfi CE; ducatur etiam $K E$ parallela ipfi AC, ipfis $C E$, $c e$ occurrens in E & e. Per propofitionem præcedentem eft $K E$ æqualis ipfi $F K$; unde cum fit etiam $F A$ æqualis ipfi $A C$, æqualis ipfis $C c$, $E e$ (per

con-

constructionem) est ergo Ke æqualis KA; unde est punctum K ad parabolam foco A & vertice principali C descriptam. *Q. E. D.*

Bisecto autem angulo AKE à rectâ KB, tanget hæc utramq; parabolam, tam foco F per A & K, quam foco A per K descriptam. Unde se mutuo tangunt parabolæ. *Q. E. D.*

Errat. *Pag.* 152. *l. ult.* pro *βc.* *l.* *Bb.*

F I N I S.

LONDON:
Printed for *W.* and *J. Innys*. Printers to the *Royal Society*; at the Sign of the *Prince's Arms*, End of St. *Paul's-Church-Yard.*

Philosoph: Transact: N°. 367

Pla: II.